Université de Tlemcen **Faculté des Sciences** **Janvier 2016**

Tronc Commun ST ***Corrigé de l'Épreuve Finale*** ***Math1***

L'usage de tout ***appareil électronique*** *est strictement* ***interdit***

Exercice 1: *Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$u_0 = 1 \quad et, \; u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1. *Calculer les termes u_1 et u_2.*
2. *Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n \leq 1$.*
3. *Montrer que la suite (u_n) est monotone, et en déduire qu'elle converge.*
4. *Calculer la limite de la suite (u_n) .*

Exercice 2: *Soit l'application* $f: \; \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = 1 - \dfrac{\sin(2x)}{x}$.

1. *Calculer $f(\pi)$ et $f(-\pi)$.*
   La fonction f est–elle injective ? Justifier.
2. *Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.*
3. *En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.*
   Soit g le prolongement par continuité de f, écrire l'expression de $g(x)$.
4. *Montrer que l'équation : $g(x) = 0$,*
   admet au moins une solution réelle dans l'intervalle $[0, \; \pi]$.
5. *Étudier la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.*

Questions de Cours: *A. Soient les fonctions réelles f et g définies par :*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

1. *Déterminer les domaines de définition de f et g.*
2. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $f(x)$.*
3. *Calculer les intégrales indéfinies suivantes :*

$$a. \; \int f(x)dx \qquad\qquad b. \; \int g(x)dx$$

B. En utilisant le changement de variable, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ calculer :

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Barème: *Exercice 1 : 6 pts* *Exercice 2 : 7 pts* *Questions de Cours: 7pts*

Bon courage

Université de Tlemcen **Faculté des Sciences** **Janvier 2016**

Tronc Commun ST ***Corrigé de l'Épreuve Finale*** ***Math1***

Exercice 1(6 pts): *La suite* (u_n) *est définie sur* $\mathbb{N}$ *par :*

$$u_0 = 1 \quad et\,, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1.

$$u_1 = \frac{u_0}{2} + \frac{u_0^2}{4} = \frac{3}{4}, \qquad u_2 = \frac{u_1}{2} + \frac{u_1^2}{4} = \frac{3}{8} + \frac{9}{64} = \frac{33}{64}. \qquad (\mathbf{0.5\ pt} \times \mathbf{2})$$

2. Démontrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n \leq 1$.

a. On a $0 < u_0 \leq 1$ *car* $u_0 = 1$. ***(0.25 pt)***

b. On suppose que, pour l'entier naturel n fixé , $0 < u_n \leq 1$, ***(0.25 pt)***

et on montre que , $0 < u_{n+1} \leq 1$. ***(0.25 pt)***

De $0 < u_n \leq 1$ *, on a :*

$$0 < \frac{u_n}{2} \leq \frac{1}{2} \quad et \quad 0 < \frac{u_n^2}{4} \leq \frac{1}{4}, \qquad (\mathbf{0.25\ pt} \times \mathbf{2})$$

par addition on obtient :

$$0 < \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} \leq \frac{3}{4}. \qquad (\mathbf{0.5\ pt})$$

Ce qui implique que : $0 < u_{n+1} \leq 1$. ***(0.25 pt)***

Conclusion: De a. et b. on conclut que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq 1$.

3. Montrons que la suite (u_n) *est monotone. Soit* $n \in \mathbb{N}$, *On a*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} - u_n = \frac{u_n^2}{4} - \frac{u_n}{2} \qquad (\mathbf{0.25\ pt})$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2}\left(\frac{u_n}{2} - 1\right) \qquad (\mathbf{0.25\ pt})$$

Comme $\frac{u_n}{2} > 0$ *et* $\frac{u_n}{2} - 1 \leq -\frac{1}{2}$ *car* $0 < u_n \leq 1$, *on en déduit que,*

$u_{n+1} - u_n < 0$ $(\mathbf{0.25\ pt})$. *La suite* (u_n) *est donc strictement décroissante.* $(\mathbf{0.25\ pt})$

Remarque: La suite (u_n) *est strictement positive, on peut alors comparer* u_{n+1}/u_n *à 1 :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{u_n}{4} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad car\ \ 0 < u_n \leq 1.$$

D'où, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *et la suite est strictement décroissante.*

- *La suite* (u_n) *est strictement décroissante et minorée (par 0),*

elle est donc convergente. ***(0.5 pt)***

4. Soit $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ *d'où* $l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$ *et par suite*

$$l = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} \quad donc \quad \frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} - 1\right) = 0, \qquad (\mathbf{0.5\ pt} \times \mathbf{2})$$

ceci donne $l = 0$ *ou* $l = 2$ *et comme* $0 \leq l \leq 1$ *alors* $l = 0$. $(\mathbf{0.5\ pt})$

Exercice 2(7 pts): $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = 1 - \frac{\sin(2x)}{x}$.

1. $f(\pi) = 1 - \frac{\sin(2\pi)}{\pi} = 1$ *et* $f(-\pi) = 1 - \frac{\sin(-2\pi)}{-\pi} = 1$. $(\mathbf{0.5\,pt \times 2})$

   (Remarquer que l'application f est paire.)

   L'application f n'est pas injective car: $\pi \neq -\pi$ *et* $f(\pi) = f(-\pi)$. ***(1 pt)***

2. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{\sin(2x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\frac{\sin(2x)}{2x}\right) = -1$, ***(1 pt)***

   car $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$.

3. *La limite de $f(x)$ en $x_0 = 0$ existe et est finie donc, la fonction f est prolongeable par continuité en ce point.* ***(0.5 pt)***

   Son prolongement g est défini par :

$$g(x) = f(x) \;\; si\; x \neq 0, \;\; et \;\; g(0) = -1. \qquad (\mathbf{0.5\,pt})$$

4. *Montrons que l'équation : $g(x) = 0$, a au moins une solution dans* $[0, \pi]$.

   La fonction g est continue sur $[0, \pi]$, $(\mathbf{0.5\,pt})$

   et, $g(0).g(\pi) = g(0).f(\pi) = -1 < 0$. $(\mathbf{0.5\,pt})$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists c \in \,]0, \pi[; \quad g(c) = 0. \qquad (\mathbf{0.5\,pt})$$

5. *Dérivabilité de g en $x_0 = 0$.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{2 - \frac{\sin(2x)}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - \sin(2x)}{x^2} \qquad (\mathbf{0.25\,pt \times 2})$$

   Le calcul direct mène à la forme indéterminée 0/0,

   On peut appliquer la règle de L'Hospital car les fonctions $x \longmapsto 2x - \sin(2x)$ *et* $x \longmapsto x^2$ *sont dérivables en 0.*

   On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x - \sin(2x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos(2x)}{2x} \qquad (\mathbf{0.25\,pt})$$

   $\lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos(2x)}{2x}$ *donne elle aussi la forme indéterminée* $0/0$.

   Réappliquons la règle de L'Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sin(2x)}{2} = 0. \quad (\mathbf{0.25\,pt})$$

   Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 \qquad (\mathbf{0.25\,pt})$$

   La fonction g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. $(\mathbf{0.25\,pt})$

Université de Tlemcen **Faculté des Sciences** **Janvier 2016**

Tronc Commun ST ***Corrigé de l'Épreuve Finale*** ***Math1***

Questions de Cours (7 pts) : *A. Les fonctions f et g sont définies par :*

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}.$$

1. *Domaines de définition de f et g.*

   a. f *est définie* $\Leftrightarrow x^2-2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq -1 \text{ et } x \neq 3)$. $\quad(\mathbf{0.5\ pt})$

   $$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,3\}. \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

   b. g *est définie* $\Leftrightarrow x^2-2x+2 \neq 0$.

   Calculons le discriminant : $\Delta = -4$.

   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}:\ x^2-2x+2 \neq 0,$ *et* $D_g = \mathbb{R}$. $(\mathbf{0.5\ pt \times 2})$

2. *Décomposition en éléments simples de $f(x)$.*

   On a :

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x+1)(x-3)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

Calcul de a : En multipliant cette égalité par $(x+1)$ et en faisant tendre x vers -1, on trouve $a = -\frac{1}{4}$. ***(0.25 pt)***

Calcul de b : En multipliant cette égalité par $(x-3)$ et en faisant tendre x vers 3, on trouve $b = \frac{1}{4}$. ***(0.25 pt)*** *Ainsi :*

$$\forall x \in D_f:\quad f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)$$

3. $$\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{4}(\ln|x-3| - \ln|x+1|) + Cte. \quad (\mathbf{1pt})$$

   b. $$\int g(x)dx = \int \frac{1}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx \quad (\mathbf{0.25\ pt})$$

En posant $t = x-1$, alors $dt = dx$, $(\mathbf{0.25\ pt})$ *et on obtient l'intégrale :*

$$\int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t + Cte. \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$D'où, \qquad \int g(x)dx = \arctan(x-1) + Cte. \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

B. Calculons l'intégrale :

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, *d'où :*

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad et \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \quad (\mathbf{0.25\ pt \times 2})$$

Et par suite,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \left(\frac{1+t^2}{2t}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + Cte. \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$D'où \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + Cte. \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$